Algorithmes Naturels et Systèmes d'Influence

Bernadette Charron-Bost
CNRS, Ecole Polytechnique, France

12 septembre 2013

Le monde du vivant s'exprime dans le langage des algorithmes

Le monde du vivant s'exprime dans le langage des algorithmes

Pourquoi le ciel est bleu ?
vs.
Pourquoi les tomates sont rouges ?

Partie I : algorithmes de consensus

Partie II : systèmes d'influence

Consensus dans un système multiagents

Consensus dans un système multiagents

- N agents notés $1, \cdots, N$

Consensus dans un système multiagents

- N agents notés $1, \cdots, N$
- Une horloge globale à tic discret, à valeurs dans $\mathbb{N}$

Consensus dans un système multiagents

- N agents notés $1, \cdots, N$
- Une horloge globale à tic discret, à valeurs dans $\mathbb{N}$
- Une suite infinie de graphes dirigés : $G_0, G_1, \ldots, G_t, \ldots$

$$G_t = \left([N] \, , \; E_t \right)$$

Consensus dans un système multiagents

- N agents notés $1, \cdots, N$
- Une horloge globale à tic discret, à valeurs dans $\mathbb{N}$
- Une suite infinie de graphes dirigés : $G_0, G_1, \ldots, G_t, \ldots$

$$G_t = \big([N] \, , \; E_t \big)$$

- L'état de l'agent i est capturé par une variable x_i dont la valeur à l'instant t est noté $x_i(t) \in \mathbb{R}^d$

Consensus dans un système multiagents

- N agents notés $1, \cdots, N$
- Une horloge globale à tic discret, à valeurs dans $\mathbb{N}$
- Une suite infinie de graphes dirigés : $G_0, G_1, \ldots, G_t, \ldots$

$$G_t = \left([N] \, , \, E_t \right)$$

- L'état de l'agent i est capturé par une variable x_i dont la valeur à l'instant t est noté $x_i(t) \in \mathbb{R}^{d=1}$

Consensus dans un système multiagents

- N agents notés $1, \cdots, N$
- Une horloge globale à tic discret, à valeurs dans $\mathbb{N}$
- Une suite infinie de graphes dirigés : $G_0, G_1, \ldots, G_t, \ldots$

$$G_t = \left([N] \, , \; E_t \right)$$

- L'état de l'agent i est capturé par une variable x_i dont la valeur à l'instant t est noté $x_i(t) \in \mathbb{R}^{d=1}$
- À chaque instant $t \geq 1$, chaque agent i échange sa valeur avec ses voisins dans G_t et met à jour x_i à partir des valeurs dont il vient de prendre connaissance

Consensus dans un système multiagents (suite)

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in Out_i(G_t)} A_{i\,j}(t)\; x_j(t)$$

avec $\sum_{j \in Out_i(G_t)} A_{i\,j}(t) = 1$

Consensus dans un système multiagents (suite)

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in Out_i(G_t)} A_{i\,j}(t)\; x_j(t)$$

avec $\sum_{j \in Out_i(G_t)} A_{i\,j}(t) = 1$ et $A_{i\,j}(t) \geq \alpha$

Consensus dans un système multiagents (suite)

$$x_i(t+1) = \sum_{j \in Out_i(G_t)} A_{i\,j}(t)\; x_j(t)$$

avec $\sum_{j \in Out_i(G_t)} A_{i\,j}(t) = 1$ et $A_{i\,j}(t) \geq \alpha$

$$x(t+1) = A(t)\; x(t)$$

avec A matrice stochastique à coefficients dans $\{0\} \cup [\alpha, 1]$

Consensus dans un système multiagents (suite)

$$x(t+1) = A(t)\, x(t)$$

avec A matrice stochastique à coefficients dans $\{0\} \cup [\alpha, 1]$

$$\rightsquigarrow x_i(t+1) \in \left[(1-\alpha)m_i(t) + \alpha M_i(t)\,,\ \alpha m_i(t) + (1-\alpha)M_i(t)\right]$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} m_i(t) = \min\{x_j(t) : j \in Out_i(G_t)\} \\ M_i(t) = \max\{x_j(t) : j \in Out_i(G_t)\} \end{array} \right.$$

Objectif :

Théorème : L'algorithme EC réalise parmi les agents un consensus asymptotique

Objectif :

Théorème : L'algorithme EC réalise parmi les agents un consensus asymptotique

$$\begin{cases} x(t+1) = P(t)\ x(0) \\ \\ P(t) = A(t)\dots A(0) \end{cases}$$

Objectif :

Théorème : L'algorithme EC réalise parmi les agents un consensus asymptotique

$$\begin{cases} x(t+1) = P(t)\ x(0) \\ \\ P(t) = A(t)\dots A(0) \end{cases}$$

Théorème : La suite des matrices (stochastiques) $\big(P(t)\big)_{t\geq 0}$ converge vers une matrice (stochastique) de rang 1

Partie I.a : Convergence et consensus

Hypothèses

A1: Chaque matrice $A(t)$ est stochastique

A2: Pour chaque agent agent i et à tout instant t, $A_{i\,i}(t) > 0$

A3: Les coefficients non nuls des matrices $A(t)$ sont uniformément bornés inférieurement par un certain $\alpha > 0$

$$A_{i\,j}(t) \in \{0\} \cup [\alpha, 1]$$

Graphe de communication

La matrice $A(t)$ est une matrice d'adjacence du graphe G_t :

$$A_{i\,j}(t) > 0 \ \text{ ssi } (i, j) \in E_t$$

Graphe de communication

La matrice $A(t)$ est une matrice d'adjacence du graphe G_t :

$$A_{i\,j}(t) > 0 \;\; \text{ssi } (i,j) \in E_t$$

NB1 : attention au sens des arcs !

Graphe de communication

La matrice $A(t)$ est une matrice d'adjacence du graphe G_t :

$$A_{ij}(t) > 0 \ \text{ ssi } (i, j) \in E_t$$

NB1 : attention au sens des arcs !

NB2 : L'hypothèse A2 correspond à l'existence d'auto-boucle à chaque nœud

Des résultats

- Théorème de Perron-Frobenius

$$\forall t \in \mathbb{N},\ A(t) = A \ \text{ où } A \ \text{ est ergodique}$$

Des résultats

- Théorème de Perron-Frobenius

$$\forall t \in \mathbb{N},\ A(t) = A \ \text{ où } A \ \text{ est ergodique}$$

- Théorème de Wolfowitz

Des résultats

- Théorème de Perron-Frobenius
- Théorème de Wolfowitz

$$\forall t \in \mathbb{N},\ A(t) \in \mathcal{M}$$

où $\mathcal{M}$ est fini et chaque produit fini de matrices de $\mathcal{M}$ est ergodique

Des résultats

- Théorème de Perron-Frobenius
- Théorème de Wolfowitz
- Modèle d'interactions bornées [Tsitsiklis 84]

$$\forall t \in \mathbb{N}, \quad A(t+\Phi)\cdots A(t) > 0$$

Des résultats

- Théorème de Perron-Frobenius
- Théorème de Wolfowitz
- Modèle d'interactions bornées [Tsitsiklis 84]

Des résultats

- Théorème de Perron-Frobenius
- Théorème de Wolfowitz
- Modèle d'interactions bornées [Tsitsiklis 84]
- Modèle coordonné [Cao, Spielman, Morse 05]

$$\forall t \in \mathbb{N},\ \ G_t \text{ est orienté}$$

Des résultats

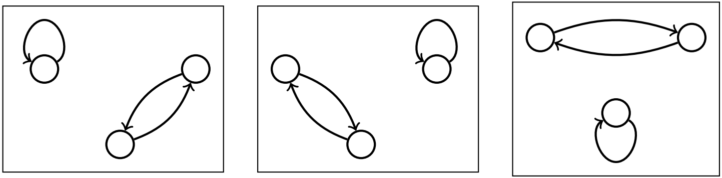
- Théorème de Perron-Frobenius
- Théorème de Wolfowitz
- Modèle d'interactions bornées [Tsitsiklis 84]
- Modèle coordonné [Cao, Spielman, Morse 05]
- Modèle bidirectionnel connecté [Moreau 05]
  1. $\forall t \in \mathbb{N},\ G_t$ est bidirectionnel
  2. $\forall s \in \mathbb{N},\ \cup_{t \geq s} G_t$ est fortement connexe

Des résultats

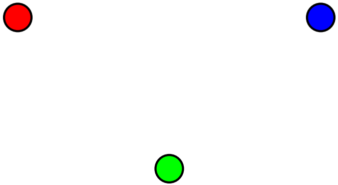
- Théorème de Perron-Frobenius
- Théorème de Wolfowitz
- Modèle d'interactions bornées [Tsitsiklis 84]
- Modèle coordonné [Cao, Spielman, Morse 05]
- Modèle bidirectionnel connecté [Moreau 05]
- Modèle décentralisé [Touri, Nedìc 11] et [Hendrickx, Tsitsiklis 11]
    1. $\forall t \in \mathbb{N},\ G_t$ est semi-simple
    2. $\forall s \in \mathbb{N},\ \cup_{t \geq s} G_t$ est fortement connexe

$\rightsquigarrow$ Peut-on se dispenser de la condition 2 de connexité ?

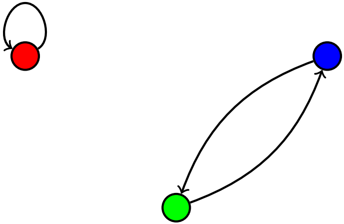
Le rôle des auto-boucles (A2)



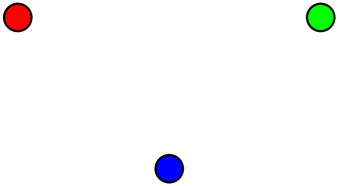
Le rôle des auto-boucles (A2)



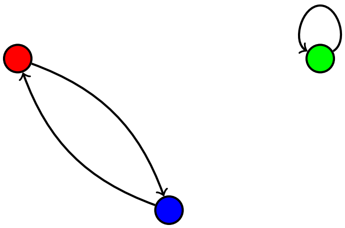
Le rôle des auto-boucles (A2)



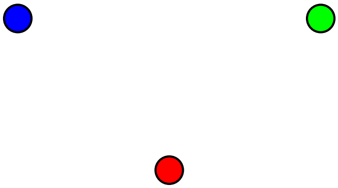
Le rôle des auto-boucles (A2)



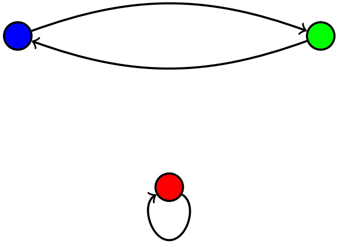
Le rôle des auto-boucles (A2)



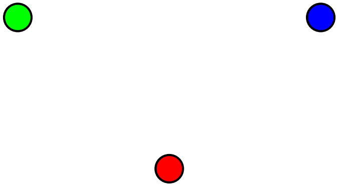
Le rôle des auto-boucles (A2)



Le rôle des auto-boucles (A2)



Le rôle des auto-boucles (A2)



Partie I.b : Vitesse de convergence

Vitesse de convergence

Vitesse de convergence

Un petit calcul dans le cas constant (où $A(t) = A$) :

$$\|x(t) - x^*\|$$

Vitesse de convergence

Un petit calcul dans le cas constant (où $A(t) = A$) :

$$\|x(t) - x^*\| = \|A^t x(0) - A^\infty x(0)\|$$

Vitesse de convergence

Un petit calcul dans le cas constant (où $A(t) = A$) :

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^*\| &= \|A^t\, x(0) - A^\infty\, x(0)\| \\ &\leq \|A^t - A^\infty\|\, \|x(0)\| \end{aligned}$$

Vitesse de convergence

Un petit calcul dans le cas constant (où $A(t) = A$) :

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^*\| &= \|A^t\, x(0) - A^\infty\, x(0)\| \\ &\leq \|A^t - A^\infty\|\, \|x(0)\| \\ &\leq \|A^t\|\, \|I - A^\infty\|\, \|x(0)\| \end{aligned}$$

Vitesse de convergence

Un petit calcul dans le cas constant (où $A(t) = A$) :

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^*\| &= \|A^t x(0) - A^\infty x(0)\| \\ &\leq \|A^t - A^\infty\| \, \|x(0)\| \\ &\leq \|A^t\| \, \|I - A^\infty\| \, \|x(0)\| \end{aligned}$$

Théorème de Gelfand :

$$\|A^t\| \sim (\rho_A)^t$$

où ρ_A est le rayon spectral de la restriction de A à un supplémentaire de $\mathbb{R}\,\mathbf{1}$

Vitesse de convergence

- **Taux de convergence** :

$$\rho = \sup_{x(0) \notin \mathbb{R}\mathbf{1} \ \wedge \ x(0) \in B} \left(\|x(t) - x^*\|\right)^{1/t}$$

Vitesse de convergence

- **Taux de convergence** :

$$\rho = \sup_{x(0) \notin \mathbb{R}\mathbf{1} \ \wedge \ x(0) \in B} (\|x(t) - x^*\|)^{1/t}$$

- **Temps de convergence** :

$$T(\epsilon) = \inf\{\tau \ : \ \forall t \geq \tau, \forall x(o) \in B, \ \|x(t) - x^*\| \leq \epsilon\}$$

Le cas constant réversible

Le cas constant réversible

En particulier :

1. G est bidirectionnel

2. $A_{i\,j} = 1/\delta_i, \ \forall i \in [N], \ \forall j \in N_i$

Le cas constant réversible

En particulier :

1. G est bidirectionnel
2. $A_{ij} = 1/\delta_i, \ \forall i \in [N], \ \forall j \in N_i$

Théorème [Olshevsky, Tsitsiklis 11] :

Si $\lambda_1 = 1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_N$ sont les valeurs propres de A, alors

$\rho = \max(|\lambda_2|, |\lambda_N|)$ et $T_N(\epsilon) = \Omega(N^3 \log\left(\frac{N}{\epsilon}\right))$

Le cas général

Deux problèmes :

1. $A(t)$ non réversible, non constant

Le cas général

Deux problèmes :

1. $A(t)$ non réversible, non constant

2. Paliers de longueur arbitraires où il n'y a pas de progression

$$A(t) = \cdots = A(t+\theta) = I$$

Le cas général

Deux problèmes :

1. $A(t)$ non réversible, non constant
2. Paliers de longueur arbitraires où il n'y a pas de progression

$$A(t) = \cdots = A(t+\theta) = I$$

[Chazelle 11] : Pour chaque $x(0) \in B$,

$$E(s) = \sum_{t \geq 0} \sum_{(i,j) \in E_t} |x_i(t) - x_j(t)|^s$$

Le cas général

Théorème [Chazelle 11] : L'énergie pour l'algorithme EC dans un système bidirectionnel avec N agents et un état initial $x(0) \in B$ vérifie

$$E(s) \leq \begin{cases} \alpha^{-O(N)} & \text{si } \; s = 1 \\ s^{1-N}\,\alpha^{-N^2+O(1)} & \text{si } \; 0 < s < 1 \end{cases}$$

Le cas général

Théorème [Chazelle 11] : L'énergie pour l'algorithme EC dans un système bidirectionnel avec N agents et un état initial $x(0) \in B$ vérifie

$$E(s) \leq \begin{cases} \alpha^{-O(N)} & \text{si } \; s = 1 \\ \\ s^{1-N}\, \alpha^{-N^2+O(1)} & \text{si } \; 0 < s < 1 \end{cases}$$

Corollaire [Chazelle 11] : Le nombre de pas ϵ-significatif de l'algorithme EC dans un système bidirectionnel avec N agents et un état initial $x(0) \in B$ vérifie

$$T_N^*(\epsilon) \leq \frac{1}{N}\alpha^{1-N}$$

et cette borne est optimale

Le cas général

Théorème [Chazelle 11] : L'énergie pour l'algorithme EC dans un système bidirectionnel avec N agents et un état initial $x(0) \in B$ vérifie

$$E(s) \leq \begin{cases} \alpha^{-O(N)} & \text{si} \quad s = 1 \\ \\ s^{1-N}\, \alpha^{-N^2+O(1)} & \text{si} \quad 0 < s < 1 \end{cases}$$

Le cas général

Théorème [Chazelle 11] : L'énergie pour l'algorithme EC dans un système bidirectionnel avec N agents et un état initial $x(0) \in B$ vérifie

$$E(s) \leq \begin{cases} \alpha^{-O(N)} & \text{si } \; s = 1 \\ s^{1-N}\,\alpha^{-N^2+O(1)} & \text{si } \; 0 < s < 1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Notion de **preuve algorithmique** ($s = 1$)

Une preuve algorithmique élémentaire

$$\mu \neq \mu_{OPT} \equiv \exists i \in [6], \exists j \in [7] \ : \ j > i \ \wedge \ \mu_i \neq M_i \ \wedge \ \mu_j \neq 0$$

Une preuve algorithmique élémentaire

FOR $i = 1$ to 6 **DO**

  IF $\mu_i \neq M_i$ **THEN**

    $j \leftarrow i + 1$

    WHILE $j \leq 7$ **DO**

      IF $\mu_i + \mu_j \leq M_i$ **THEN**

        $(\mu_i\,,\,\mu_j\,,\,j) \leftarrow (\mu_i + \mu_j\,,\,0\,,\,j+1)$

        ELSE $(\mu_i\,,\,\mu_j\,,\,j) \leftarrow (M_i\,,\,\mu_j - M_i + \mu_i\,,\,8)$

Une preuve algorithmique élémentaire

- Nombre fini d'itérations (≤ 21)

Une preuve algorithmique élémentaire

- Nombre fini d'itérations (≤ 21)
- À chaque itération, la rentabilité augmente

Une preuve algorithmique élémentaire

- Nombre fini d'itérations (≤ 21)
- À chaque itération, la rentabilité augmente
- L'algorithme se termine avec $\mu = \mu_{OPT}$

Une preuve algorithmique élémentaire

- Nombre fini d'itérations (≤ 21)
- À chaque itération, la rentabilité augmente
- L'algorithme se termine avec $\mu = \mu_{OPT}$

C.Q.F.D.

Partie II : Systèmes d'influence

Systèmes d'influence

- **algorithme de communication**: chaque agent détermine ses voisins sortants (ceux dont il veut dépendre)

$$x \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N \longrightarrow N_i^+(x)$$

Systèmes d'influence

- **algorithme de communication**: chaque agent détermine ses voisins sortants (ceux dont il veut dépendre)

$$x \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N \longrightarrow N_i^+(x)$$

  - $\left(N_i^+(x)\right)_{i=1\ldots N} \rightsquigarrow G(x) = ([N], E(x))$ (système **endogène)**

Systèmes d'influence

- **algorithme de communication**: chaque agent détermine ses voisins sortants (ceux dont il veut dépendre)

$$x \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N \longrightarrow N_i^+(x)$$

  - $\left(N_i^+(x)\right)_{i=1\ldots N} \rightsquigarrow G(x) = ([N], E(x))$ (système **endogène)**
  - algorithme **distribué**, éventuellement compliqué qui s'exprime en logique du 1^{er} ordre

Systèmes d'influence

- **un algorithme de communication**:

$$x \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N \longrightarrow G(x)$$

Systèmes d'influence

- **un algorithme de communication**:

$$x \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N \longrightarrow G(x)$$

- **une action**: chaque agent effectue une action **locale** qui ne dépend que de l'état de ses voisins sortants

$$f_i \,:\, x \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N \longrightarrow f_i(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_k, \ldots, x_N)$$

où $N_i^+(x) = \{j, i, k\}$

Systèmes d'influence

- **un algorithme de communication**:

$$x \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N \longrightarrow G(x)$$

- **une action**: chaque agent effectue une action **locale** qui ne dépend que de l'état de ses voisins sortants

$$f_i \ : \ x \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N \longrightarrow f_i(x_1, \dots, x_j, \ \dots, x_k \ , \dots, x_k \ , \dots, x_N)$$

où $N_i^+(x) = \{j, i, k\}$

  - toutes les fonctions f_i peuvent être différentes ($\neq$ physique)

Systèmes d'influence

- **un algorithme de communication**:

$$x \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N \longrightarrow G(x)$$

- **une action**: chaque agent effectue une action **locale** qui ne dépend que de l'état de ses voisins sortants

$$f_i \;:\; x \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N \longrightarrow f_i(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots, x_k, \ldots, x_N)$$

où $N_i^+(x) = \{j, i, k\}$

  - toutes les fonctions f_i peuvent être différentes ($\neq$ physique)
  - algorithmes généralement très simples

Systèmes d'influence

- **un algorithme de communication**:

$$x \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N \longrightarrow G(x)$$

- **une action**: chaque agent effectue une action **locale** qui ne dépend que de l'état de ses voisins sortants

$$f_i \;:\; x \in \left(\mathbb{R}^d\right)^N \longrightarrow f_i(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_k, \dots, x_N)$$

où $N_i^+(x) = \{j, i, k\}$

  - toutes les fonctions f_i peuvent être différentes ($\neq$ physique)
  - algorithmes généralement très simples

    $\rightsquigarrow$ systèmes diffusifs : chaque f_i est une combinaison linéaire convexe

Le modèle (diffusif) de Hegselmann-Krause

"Nous sommes principalement influencés par nos semblables"

[French, de Groot, Lehrer, Wagner, Cohen, Friedkin, Johnsen, Weisbuch, Dittmer, Hegselmann, Krause]

Le modèle (diffusif) de Hegselmann-Krause

"Nous sommes principalement influencés par nos semblables"

[French, de Groot, Lehrer, Wagner, Cohen, Friedkin, Johnsen, Weisbuch, Dittmer, Hegselmann, Krause]

Formellement,

$$j \in N_i^+(x) \Leftrightarrow |x_i - x_j| < r$$

Le modèle (diffusif) de Hegselmann-Krause

"Nous sommes principalement influencés par nos semblables"

[French, de Groot, Lehrer, Wagner, Cohen, Friedkin, Johnsen, Weisbuch, Dittmer, Hegselmann, Krause]

Formellement,

$$j \in N_i^+(x) \Leftrightarrow |x_i - x_j| < r$$

$\leadsto$ tous les graphes de communication sont **bidirectionnels**

Le modèle (diffusif) de Hegselmann-Krause

"Nous sommes principalement influencés par nos semblables"

[French, de Groot, Lehrer, Wagner, Cohen, Friedkin, Johnsen, Weisbuch, Dittmer, Hegselmann, Krause]

Formellement,

$$j \in N_i^+(x) \Leftrightarrow |x_i - x_j| < r$$

$\leadsto$ tous les graphes de communication sont **bidirectionnels**

Théorème [Blondel, Hendrickx, Tsitsiklis 09] : Le modèle HK converge vers x^* en temps fini. De plus, ou bien $x_i^* = x_j^*$ ou bien $|x_i^* - x_j^*| \geq r$

Flocking

Flocking

- algorithme de communication : celui du modèle HK

$$(i,j) \in E(x) \Leftrightarrow |x_i - x_j| < r$$

Flocking

- algorithme de communication : celui du modèle HK

$$(i,j) \in E(x) \Leftrightarrow |x_i - x_j| < r$$

- action : chaque oiseau aligne sa vitesse sur ses voisins

Flocking

- algorithme de communication : celui du modèle HK

$$(i, j) \in E(x) \Leftrightarrow |x_i - x_j| < r$$

- action : chaque oiseau aligne sa vitesse sur ses voisins

$$\begin{cases} z(t+1) & = & z(t) + v(t) \\ v(t+1) & = & P(t)\, v(t) \end{cases}$$

Flocking

- algorithme de communication : celui du modèle HK
$$(i,j) \in E(x) \Leftrightarrow |x_i - x_j| < r$$

- action : chaque oiseau aligne sa vitesse sur ses voisins
$$\left\{ \begin{array}{rcl} z(t+1) & = & z(t) + v(t) \\ v(t+1) & = & P(t)\, v(t) \end{array} \right.$$

$\rightsquigarrow$ système **non diffusif**

Flocking

- algorithme de communication : celui du modèle HK

$$(i,j) \in E(x) \Leftrightarrow |x_i - x_j| < r$$

- action : chaque oiseau aligne sa vitesse sur ses voisins

$$\begin{cases} z(t+1) & = & z(t) + v(t) \\ v(t+1) & = & P(t)\, v(t) \end{cases}$$

[Vicsek, Cucker, Smale]

Flocking

- algorithme de communication : celui du modèle HK

$$(i,j) \in E(x) \Leftrightarrow |x_i - x_j| < r$$

- action : chaque oiseau aligne sa vitesse sur ses voisins

$$\begin{cases} z(t+1) & = & z(t) + v(t) \\ v(t+1) & = & P(t)\, v(t) \end{cases}$$

[Vicsek, Cucker, Smale]

Théorèmes [Cucker, Smale 07], [Chazelle 09] : Énoncé de conditions sous lesquelles le système réalise un consensus asymptotique parmi les agents

Systèmes d'influence

Exemples :

1. modèle HK
2. Flocking
3. Chimiotaxie, modèle d'Ising, réseaux neuronaux, dynamique des population, ...

Systèmes d'influence

Exemples :

1. modèle HK

2. Flocking

3. Chimiotaxie, modèle d'Ising, réseaux neuronaux, dynamique des population, ...

Théorème [Chazelle 13] : Les systèmes diffusifs sont presque surement asymptotiquement périodiques

Merci !