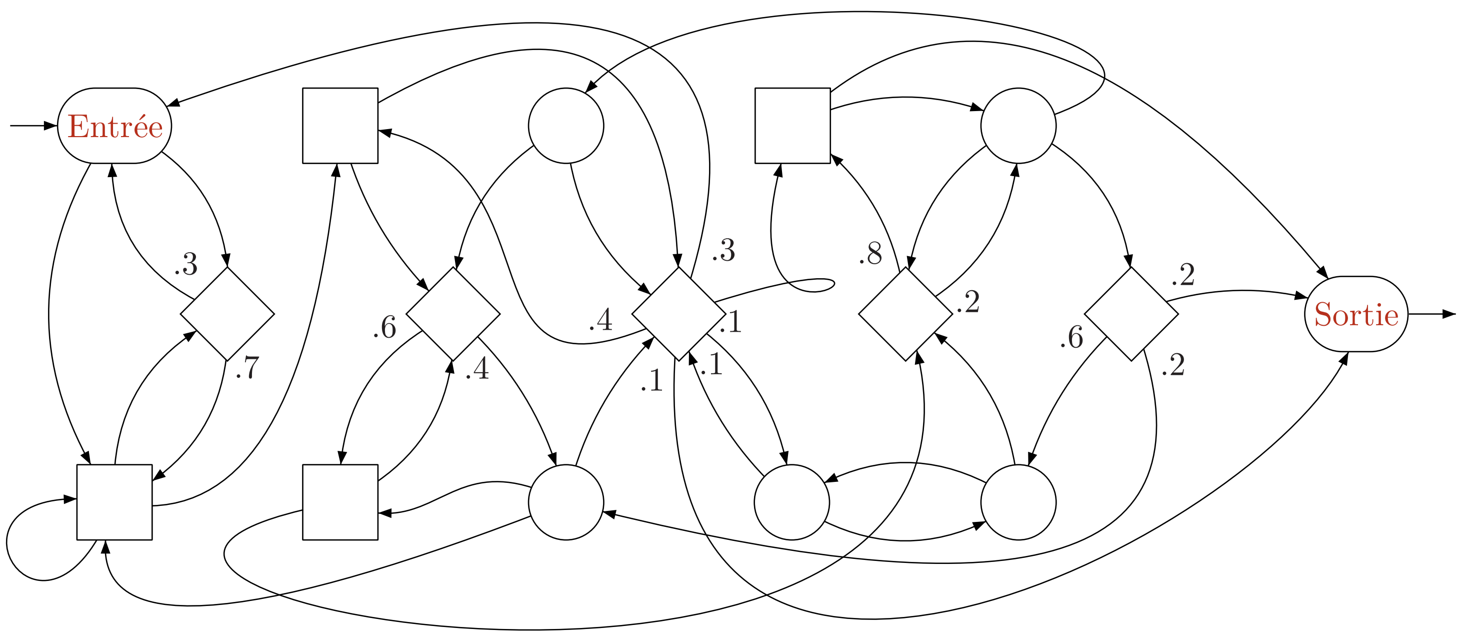
Jeux, Stratégies et Algorithmes

Hugo Gimbert, CNRS, LABRI, Bordeaux

Un jeu stochastique d'accessibilité

Sommets contrôlés par: joueur Max (cercles), joueur Min (carrés), le hasard (losanges).



Résoudre le jeu: calculer une stratégie pour atteindre la sortie avec probabilité maximum.

Le jeu des pièces

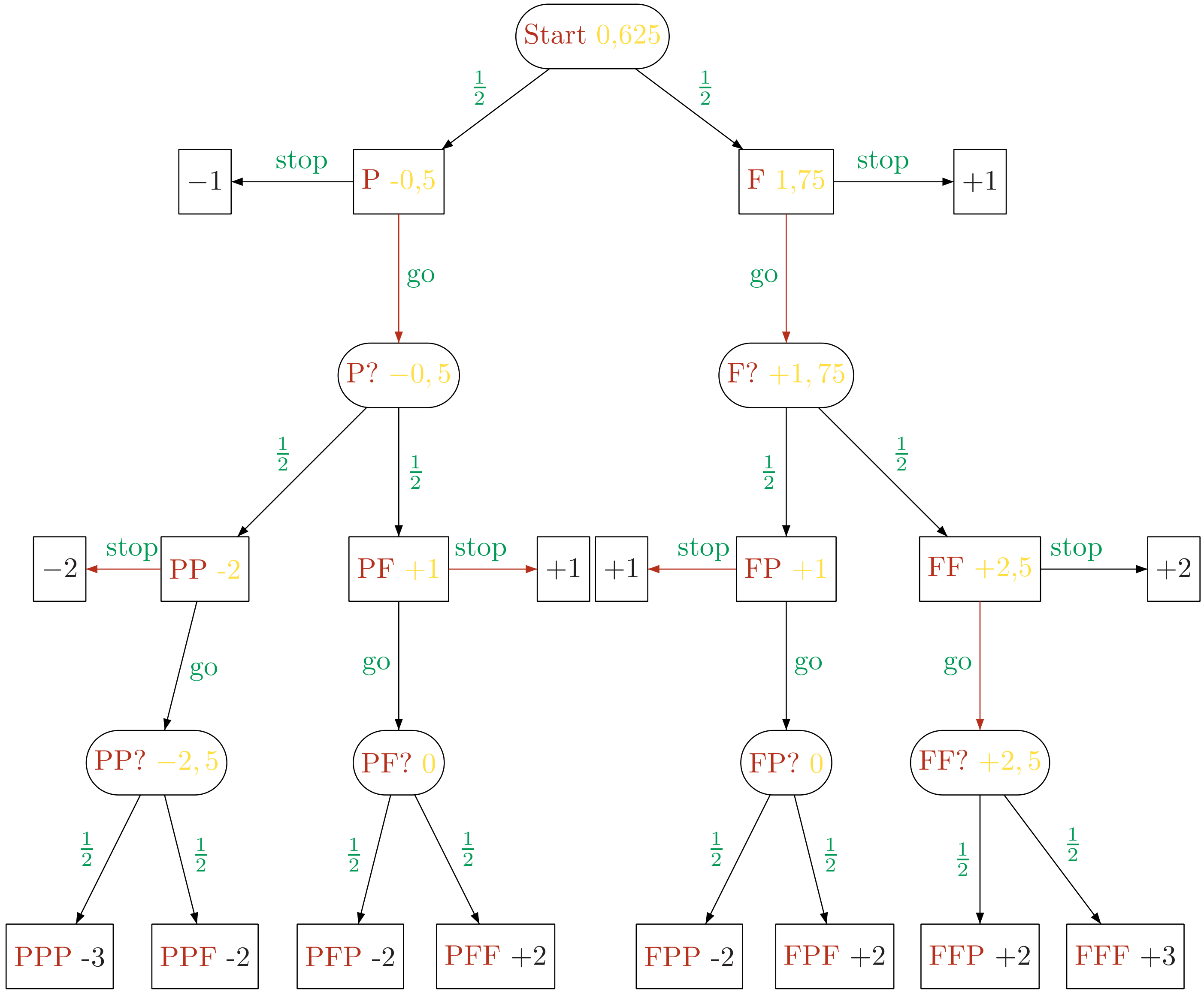
On joue à pile ou face, maximum trois fois.

On s'arrête quand on veut.

- si plus de piles que de faces, on perd autant d'euros que le nombre de piles.
- si plus de faces que de piles, on gagne autant d'euros que le nombre de faces.
- si un pile et un face, on gagne un euro.

Acceptez-vous de jouer à ce jeu? Avec quelle stratégie?

Solution


Start 0,625
1/2
1/2
−1
stop
P -0,5
F 1,75
stop
+1
go
go
P? −0, 5
F? +1, 75
1/2
1/2
1/2
1/2
−2
stop
PP -2
PF +1
stop
+1
+1
stop
FP +1
FF +2,5
stop
+2
go
go
go
go
PP? −2, 5
PF? 0
FP? 0
FF? +2, 5
1/2
1/2
1/2
1/2
1/2
1/2
1/2
1/2
PPP -3
PPF -2
PFP -2
PFF +2
FPP -2
FPF +2
FFP +2
FFF +3

Un peu de formalisme

Sommets: $V = V_{\mathrm{Max}} \cup V_{\mathrm{Min}} \cup V_{\mathsf{Rand}}$
Arètes: $E \subseteq (V_{\mathrm{Max}} \cup V_{\mathrm{Min}}) \times V$

Probas de transition:
on va de $v \in V_{\mathsf{Rand}}$ à w avec proba $0 \leq p(v, w) \leq 1$.

Stratégie pour Max: $\sigma : V^* V_{\mathrm{Max}} \longrightarrow V$
Stratégie pour Min: $\tau : V^* V_{\mathrm{Min}} \longrightarrow V$

Proba d'atteindre v : $\mathbb{P}_v^{\sigma,\tau}\,(Reach)$

Qui choisit le premier sa stratégie?
Joueur Max : $\overline{\mathrm{val}(v)} = \sup_\sigma \inf_\tau \mathbb{P}_v^{\sigma,\tau}\,(Reach)$
Joueur Min : $\underline{\mathrm{val}(v)} = \inf_\tau \sup_\sigma \mathbb{P}_v^{\sigma,\tau}\,(Reach)$

La valeur d'un jeu

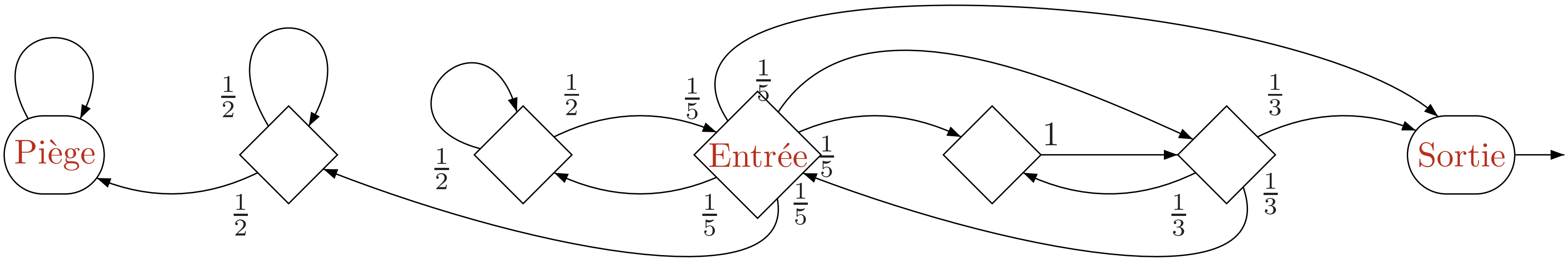
Théorème[Martin 98]: existence de la valeur:

$$\mathrm{val}(v) = \underline{\mathrm{val}(v)} = \overline{\mathrm{val}(v)}$$

Théorème: existence de stratégies optimales.

Question: comment les calculer?

Calcul des valeurs pour 0 joueur



$\mathrm{val}(v)$= probabilité d'atteindre la sortie.

$$\mathrm{val}(v) = \sum_{w} p(w|v)\,\mathrm{val}(w)$$

Complexité cubique : $\mathcal{O}(|V_{\text{Rand}}|^3|bitlength|)$

Calcul des valeurs pour 1 joueur

Sommets: $V = V_{\mathrm{Max}} \cup V_{\text{Rand}}$.

Programme linéaire, pour $f : V \to [0,1]$

$$\text{minimiser } \sum_v f(v)$$

si v est la cible	$f(v) = 1$
si $v \in V_{\text{Rand}}$	$f(v) = \sum_w p(w\|v) f(w)$
si $v \in V_{\mathrm{Max}}$ et $(v,w) \in E$	$f(v) \geq f(w)$

Théorème: ce programme linéaire a une solution minimale, c'est la valeur des sommets.

Calcul des valeurs pour 1 joueur

Théorème [Kachiyan 79]: on peut calculer une solution minimale d'un programme linéaire en temps polynomial.

Calcul des valeurs pour 2 joueurs

Polynomial?

Problème de décision: "la valeur est supérieure à $\frac{1}{2}$?" dans NP $\cap$ co-NP

Algorithmes:

- Enumération des stratégies sans-mémoire.
- Amélioration des valeurs.
- Amélioration des stratégies.
- La question reste ouverte....

Perspectives

"Meilleurs" algorithmes pour le cas à un joueur?

Se passer de la programmation linéaire.
Méthodes de points intérieurs...

Adapter les algorithmes aux jeux à deux joueurs.

Stage de recherche...