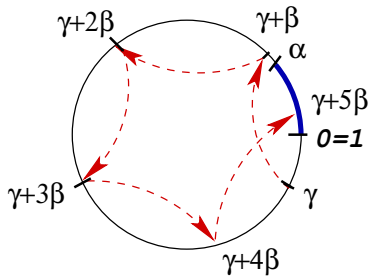


Comptage de mots engendrés par morphismes et intervalles

Anna FRID

anna.e.frid@gmail.com

Mots de rotation



$$w = 000001\dots$$

α

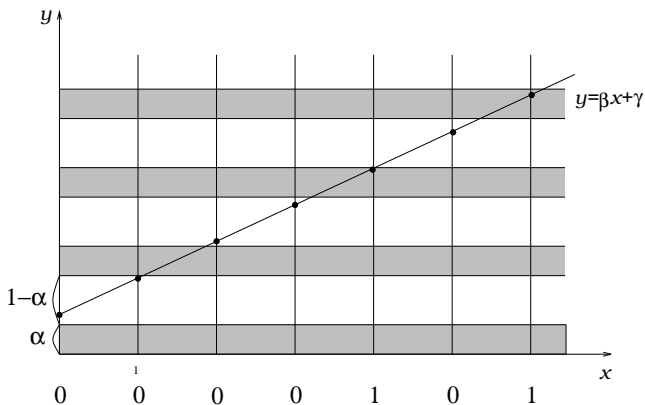
β

γ

Mots de rotation

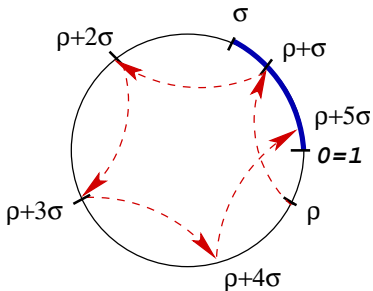
Trois constantes $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1)$ définissent un mot $w = w_0 w_1 w_2 \cdots$:

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{if } \{i\beta + \gamma\} < \alpha, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Cas particulier : mots sturmiens

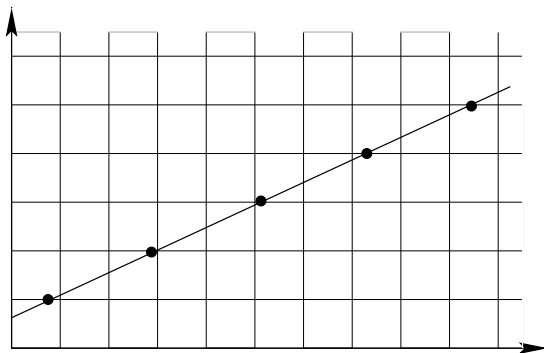
$\alpha = \beta = \sigma$, irrationnels.



$w = 10001 \dots$

Définition mécanique

$$y = \sigma x + \rho, \quad 0 \leq \sigma, \rho < 1.$$



1 0 1 0 0 1 0 1 0 1

$$w = w_1 w_2 \cdots$$

$$w_n = \lfloor n\sigma + \rho \rfloor - \lfloor (n-1)\sigma + \rho \rfloor \quad (\text{or } \lceil \cdot \rceil).$$

Exemple : mot de Fibonacci

Example

$$\varphi(0) = 01, \varphi(1) = 0$$

$$0 \rightarrow 01 \rightarrow 010 \rightarrow 01001 \rightarrow 01001010 \rightarrow 0100101001001 \rightarrow \dots$$

La limite est

$$\varphi^\infty(a) = 0100101001001010010100100101001001 \dots$$

Lemma

Le mot de Fibonacci est sturmien avec $\sigma = \rho = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

G. Rote (1992) : dans chaque mot de rotation, il y a au maximum $2n$ facteurs de longueur n .
(toujours si $\alpha > \beta$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, α et β sont rationnellement indépendants)

Dans chaque mot Sturmien, il y a $n + 1$ facteurs de longueur n .
($\alpha = \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

Si β est rationnel, le mot de rotation est périodique, avec la complexité constante.

Question

Combien y-a-t-il de mots sturmiens de longueur n sur l'alphabet $\{0, 1\}$?

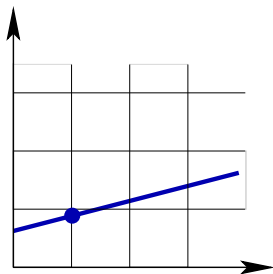
Réponse :

- Lipatov, 1982 ;
- Mignosi, 1991 ;
- Berstel, Pocchiola, 1993 méthode géométrique.

$$1 + \sum_{p=1}^n \varphi(p)(n+1-p) = \frac{n^3}{\pi^2} + O(n^2 \log n).$$

Première lettre

Considérons la droite $y = \sigma x + \rho$, $0 < \sigma, \rho < 1$ et le mot Sturmien qu'elle engendre.

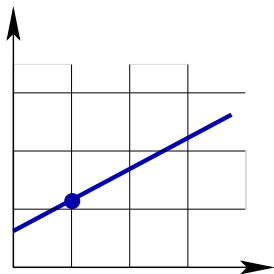


0

$$\sigma + \rho < 1 \implies w_1 = 0.$$

Première lettre

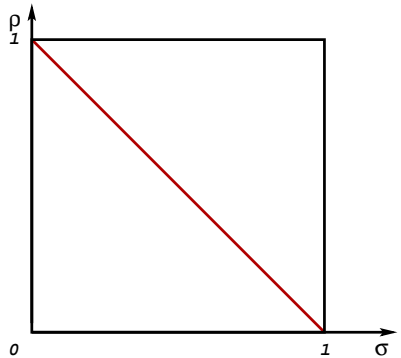
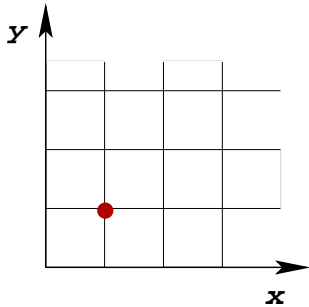
Considérons la droite $y = \sigma x + \rho$, $0 < \sigma, \rho < 1$, et le mot sturmien qu'elle engendre.



1

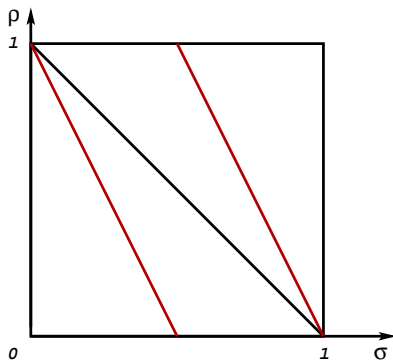
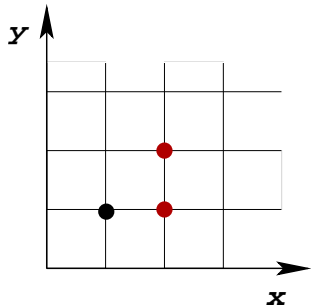
$$\sigma + \rho > 1 \implies w_1 = 1.$$

Première lettre et l'image duale



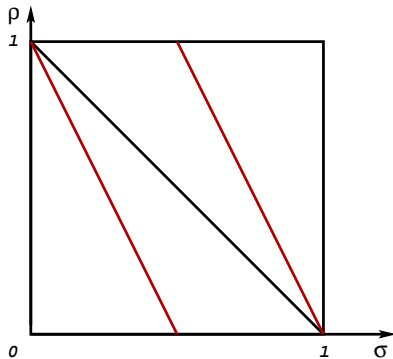
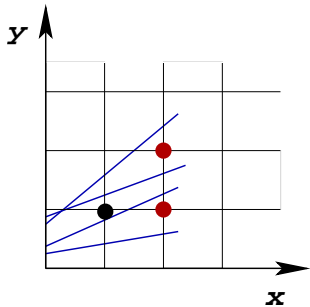
La droite sur l'image duale est $\sigma + \rho = 1$.

Deux lettres et l'image duale



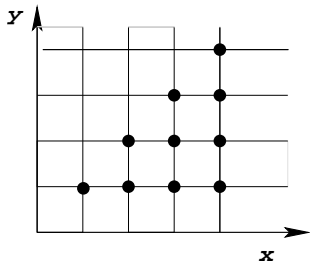
Deux nouvelles droites : $2\sigma + \rho = 1$, $2\sigma + \rho = 2$.

Deux lettres et l'image duale

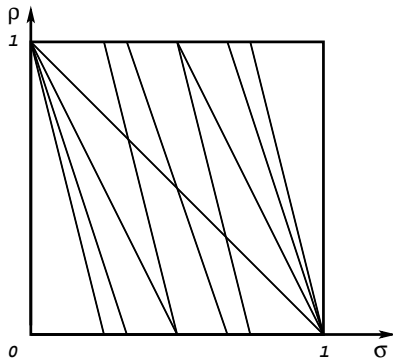


Deux nouvelles droites : $2\sigma + \rho = 1$, $2\sigma + \rho = 2$.

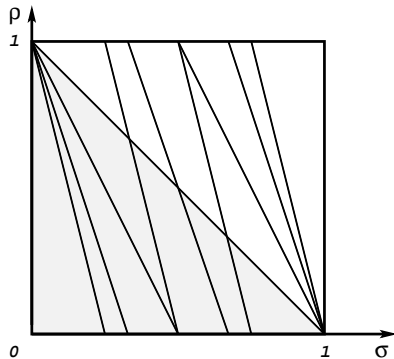
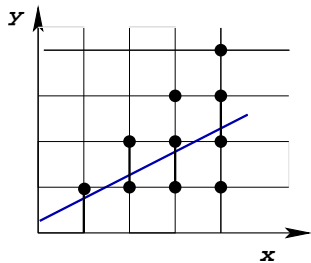
Image duale



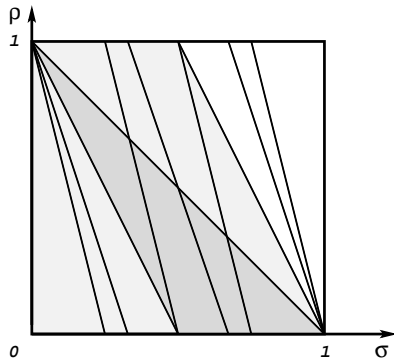
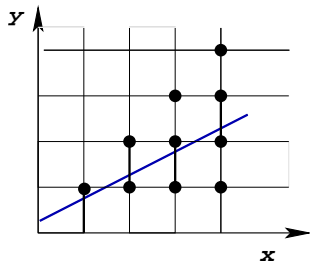
Points \iff droites



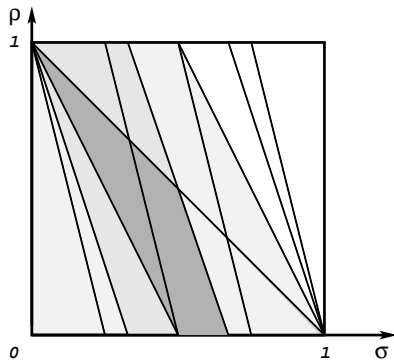
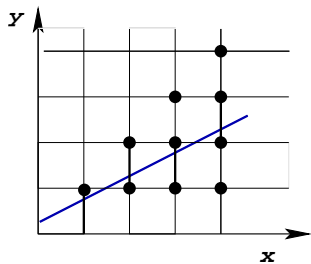
Faces de l'image duale



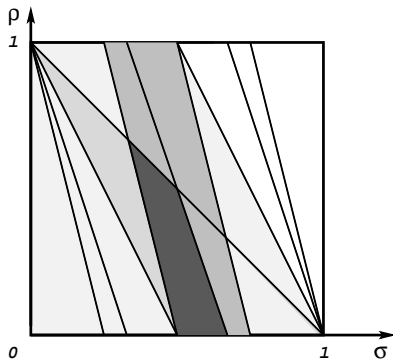
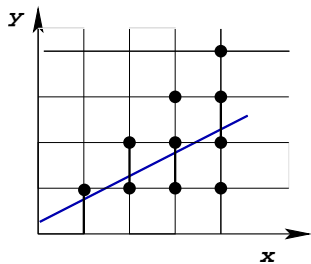
Faces de l'image duale



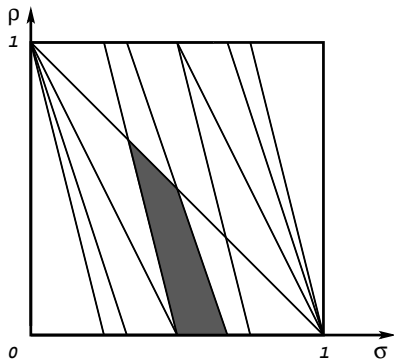
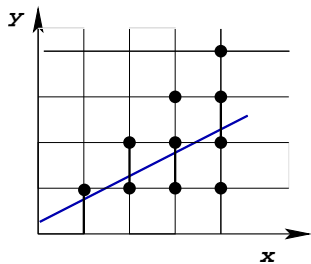
Faces de l'image duale



Faces de l'image duale



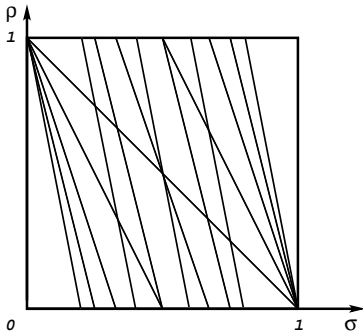
Faces de l'image duale



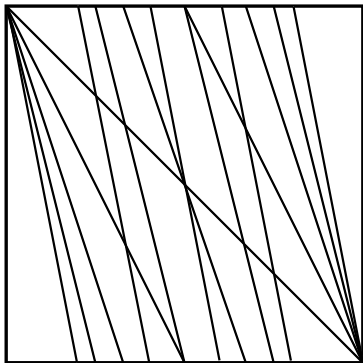
Faces de l'image duale

Lemma

Le nombre de mots sturmiens de longueur n est égal au nombre de faces de l'image duale d'ordre n .



Qu'est-ce qu'on sait sur les faces ?



$$v - e + f = 1.$$

Théorème [Lipatov 82, Mignosi 91, Berstel, Pocchiola 93]

Le nombre de mots sturmiens de longueur n est

$$1 + \sum_{p=1}^n \varphi(p)(n+1-p) = \frac{n^3}{\pi^2} + O(n^2 \log n).$$

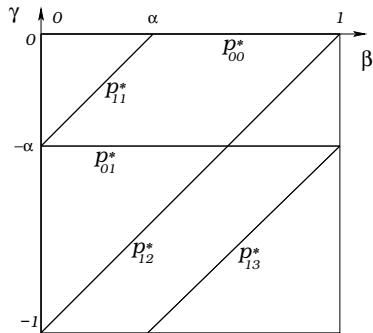
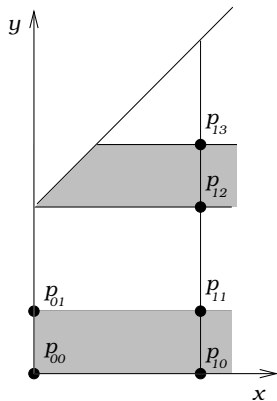
Question

Combien y-a-t-il de mots de rotation dont l'intervalle α est fixé ?

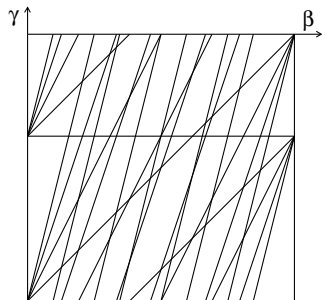
Réponse [Cassaigne, Frid, 2007]

On sait combien il y a de faces dans l'image duale. Pour les α proches de $1/2$, cela suffit, pour d'autres α , cela donne une borne supérieure.

Dualité pour les mots de rotation



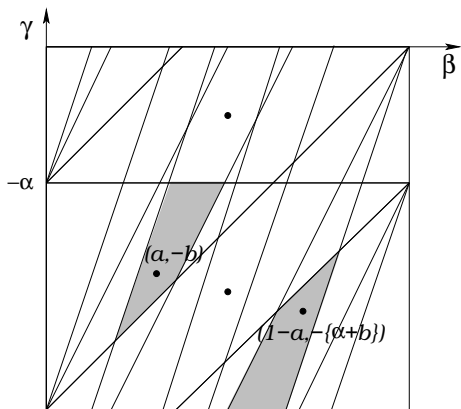
Dualité pour les mots de rotation



Pour tout α irrationnel, le nombre de faces de l'image d'ordre $n + 1$ est

$$d_\alpha(n) = 2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + 2 \sum_{p=1}^n (n-p+1)\varphi(p).$$

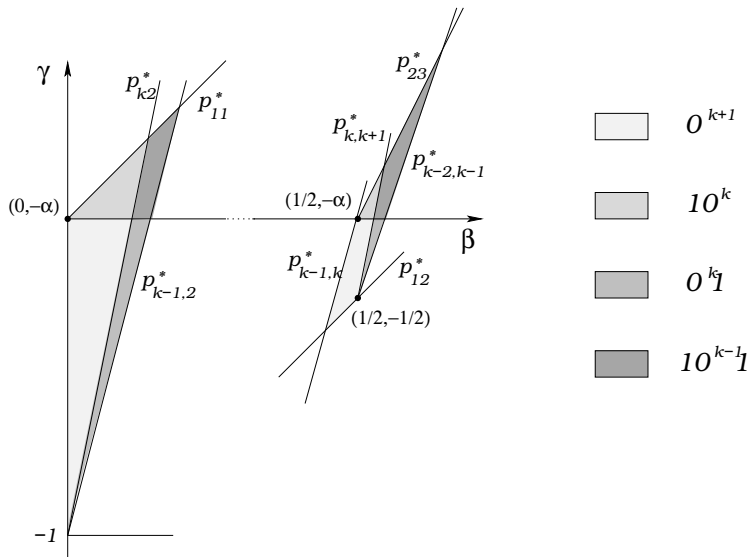
Ce n'est qu'une borne supérieure !



$$a_\alpha(n) \leq d_\alpha(n-1)/2 + 1 =: g(n).$$

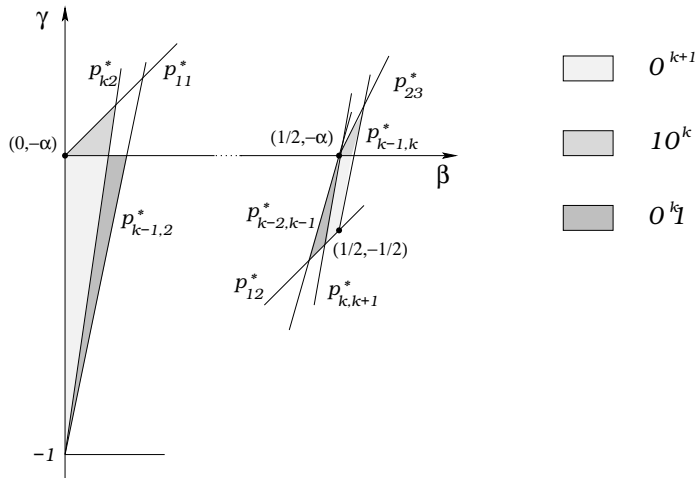
Problèmes non-symétriques

Faces qui donnent des mots égaux, k est impair



Problèmes non-symétriques

Faces qui donnent des mots égaux, k est pair



Théorème [Cassaigne, F., 2007]

Pour tout $\alpha \in (0, 4; 0, 5)$ irrationnel, $a_\alpha(1) = 2$, $a_\alpha(2) = 4$, $a_\alpha(3) = 8$,
 $a_\alpha(4) = 16$, $a_\alpha(5) = 30$ et

$$a_\alpha(n+1) = \begin{cases} g(n) - 4, & n \text{ est impair,} \\ g(n) - 3, & n \text{ est pair.} \end{cases}$$

$$g(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \sum_{p=1}^n (n-p+1)\varphi(p) + 2,$$

$$a_\alpha(n) = (1/6 + 1/\pi^2)n^3 + O(n^2 \log n).$$

Théorème [Cassaigne, F., 2007]

Pour tout $\alpha \in (1/3, 1/2)$ irrationnel,

$$g(n) - a_\alpha(n+1) \leq \text{Const.}$$

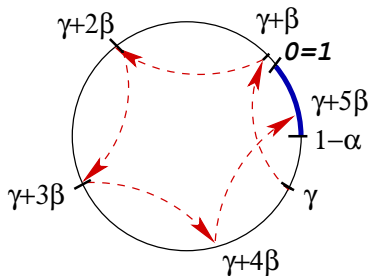
Et si $\alpha < 1/3$?..

C'est $\Theta(n^3)$ [Frid, 2005], mais...

Nombre total des mots de rotation

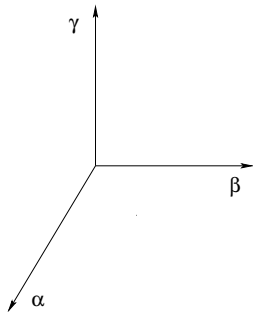
Question

Combien y a-t-il de mots de rotation de longueur n ?



3 dimensions

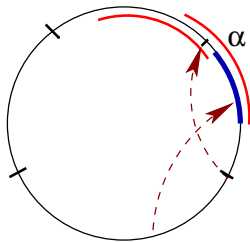
Trois paramètres $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1)$. Faut-il dessiner une image tridimensionnelle ?



?

Idée principale

Par bonheur, NON. Il y a une autre méthode.



$$r_{k+1} = r_k + u_k - v_k,$$

où u, v sont des mots sturmiens de même pente α .

[Berstel, Vuillon 2002] (pour plus d'intervalles aussi).

Theorème [F., Jamet, 2014]

Pour tout $n = 3$, le nombre total des mots binaires de rotation de longueur $n + 1$ est

$$f(n+1) = n^2 + 3n + 4 + \frac{1}{2} \sum_{p=3}^n \varphi(p)(n^2 - p^2 + n + p) - f_1(n) - 2 \sum_{l=2}^{n-1} f_2(n, l),$$

where

$$f_1(n) = \begin{cases} 2 \sum_{i=k}^{2k} \sum_{p=1}^{i+1} \varphi(p), & \text{if } n = 2k + 1, \\ 2 \sum_{i=k}^{2k-1} \sum_{p=1}^{i+1} \varphi(p) + \sum_{p=1}^k \varphi(p), & \text{if } n = 2k, \end{cases}$$

$$g(n, l) = n - l + 1 + (n \bmod (l + 1)),$$

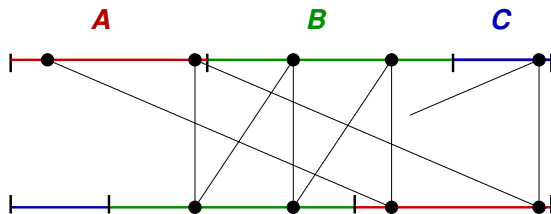
$$h(n, l) = \min(l + 1, n - l),$$

$$f_2(n, l) = \left(\frac{1}{2} \left\lfloor \frac{n}{l+1} \right\rfloor g(n, l) - h(n, l) \right) (\varphi(l+1) - 1) + h(n, l) \left(\frac{\varphi(l+1)}{2} - 1 \right).$$

Valeurs

n	6	7	10	15	20	50	75	100
$f(n)$	64	112	504	2804	9442	423814	2222984	7155096
$\frac{4\pi^2 f(n)}{3n^4} \approx$	0.65	0.61	0.66	0.73	0.78	0.89	0.92	0.94

Echange de 3 intervalles



$w = \mathbf{ABBAC} \dots$

Theorème [Ambrož, F, Masáková, Pelantová, 2011]

$$\frac{1}{3\pi^2} + o(1) \leq \#3\text{iet}(N)/N^4 \leq \frac{2}{\pi^2} + o(1).$$

- Le nombre des mots de rotation binaires dont l'intervalle est fixé et rationel ;
- Le nombre des mots de rotation binaires dont l'intervalle est fixé et inférieur à $1/3$;
- Plus d'intervalles de rotation ;
- L'échange de plus que 3 intervalles ;
- L'asymptotique pour l'échange de 3 intervalles ;
- etc.

`anna.e.frid@gmail.com`